Logika II, zadania przygotowawcze

Notacja:

- Ax to zbiór aksjomatów logicznych,
- Fm to zbiór formuł,
- $Sent$ to zbiór zdań,
- Wyrażenie '$M \models \varphi[v]$' odczytujemy: 'formuła φ jest spełniona w M przy wartościowaniu v'.

Definicje:

Definicja 1 *Skończony ciąg formuł* $(\psi_1 \ldots \psi_n)$ *jest dowodem* φ *na gruncie* X *wtw następujące warunki są spełnione:*

- $\psi_n = \varphi$,
- $\forall k \leqslant n \Big[\psi_k \in Ax \vee \psi_k \in X \vee \exists i, j < k(\psi_i = \ulcorner \psi_j \to \psi_k \urcorner)\Big]$.

Definicja 2 $X \vdash \varphi \equiv \exists d$ *(d jest dowodem φ na gruncie X).*

Definicja 3 $Cn(X) = \{\varphi : X \vdash \varphi\}$.

Definicja 4 $X \models \varphi \equiv \forall M(M \models X \to M \models \varphi)$.

Podstawowe fakty:

(a) $\forall X\ X \subseteq Cn(X)$,

(b) $\forall X, Y\ \Big(X \subseteq Y \to Cn(X) \subseteq Cn(Y)\Big)$,

(c) $CnCn(X) = Cn(X)$.

Ćwiczenia:

1. Wykaż, że $\forall X \subseteq Fm\Big(X$ jest niesprzeczny $\to Cn(X)$ jest niesprzeczny$\Big)$.
2. Wykaż, że $\forall X \subseteq Sent\ \forall \varphi, \psi \in Sent\Big(X \models (\varphi \to \psi) \equiv X \cup \{\varphi\} \models \psi\Big)$.
3. Wykaż, że $Cn(X \cup Y) = Cn\Big(Cn(X) \cup Cn(Y)\Big)$.
4. Wykaż, że $\forall X, Y \subseteq Fm\Big((X \subseteq Y \wedge Y$ jest niesprzeczny$) \to X$ jest niesprzeczny$\Big)$.

5. Wykaż, że $\forall X\big(X$ jest zupełny $\rightarrow \forall\varphi \in Fm$ $(\varphi \notin Cn(X) \rightarrow X \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczny$)\big)$.

6. Czy poniższe zdania są prawdziwe dla dowolnych zbiorów zdań Z i S?

   - $Cn(Z \cap S) = Cn(Z) \cap Cn(S)$,
   - $Cn(Z \cup S) = Cn(Z) \cup Cn(S)$.

7. Wykaż, że $\forall X \subseteq Sent\ \forall M\ \forall\varphi \in Sent\ \big((M \models X \wedge X \vdash \varphi) \rightarrow M \models \varphi\big)$.

8. Niech $N = (\omega, +, \times, 0)$. Niech v będzie wartościowaniem w N takim że dla dowolnej zmiennej x_i, $v(x_i) = 2(i+1)$. Oblicz wartości następujących termów w N przy wartościowaniu v:

   - $0 + x_2$,
   - $(x_3 \times x_4) + x_1$,
   - $x_2 \times (x_8 \times 0)$.

9. Przy N oraz v zdefiniowanymi tak jak powyżej, sprawdź czy następujące warunki są spełnione:

   - $N \models x_2 + x_1 = x_3[v]$,
   - $N \models \exists x_3(x_2 + x_1 = x_3)[v]$,
   - $N \models \forall x_4 \exists x_2(x_4 \times x_2 = x_2)[v]$,
   - $N \models \exists x_4 \forall x_2(x_4 \times x_2 = x_2)[v]$.

10. Niech $Parz$ i $Nparz$ będą (odpowiednio) zbiorami parzystych i nieparzystych liczb naturalnych. Dla podanych par modeli sprawdź, czy istnieje zdanie języka tych modeli prawdziwe w jednym z nich, lecz nieprawdziwe w drugim.

    - $(Parz, <)$, $(Nparz, <)$,
    - $(Parz, <)$, $(Nparz, >)$,
    - $(Parz, +)$, $(Nparz, \times)$.